〈자연계열〉

# 2017학년도 논술전형
# 모의고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH

서울과학기술대학교

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# [문제 1]

## 1. 출제배경

대학과정에서 수학을 공부하기 위해서는 함수의 극한, 함수의 연속 등 함수에 관한 기본적인 성질 뿐 아니라 미분을 포함한 여러 가지 계산 능력을 갖추고 있어야 한다. 이 문항에서는 이러한 기본 능력을 갖추고 있는지 확인하고자 하였다. 아울러 단순한 계산을 넘어선 수학적인 아이디어를 찾아낼 수 있는지도 확인하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 함수의 극한, 함수의 연속, 다항식의 성질, 미분 등을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 다항식을 구할 수 있는지 평가한다.

[1.2] $n$차 방정식의 해 $\alpha$를 알고 있을 때 $\alpha+1$이 해가되는 방정식을 구하는 수학적 창의력이 있는지 평가한다.

[1.3] 문항 [1.2]와 유사한 아이디어로 $\dfrac{1}{\alpha}$이 해가 되는 다항식을 구할 수 있는지 평가한다.

[1.4] 문항 [1.1]에서 구한 방정식에 문항 [1.2]와 [1.3]의 아이디어를 결합하여 $\dfrac{1}{\alpha+1}$이 해가되는 방정식을 구하고, 또 근과 계수의 관계를 활용하여 원하는 값을 구할 수 있는지 평가한다.

## 2. 예시답안 및 해설

[1.1] (1)에 따라서 $f(0)=f(1)=0$이므로 $f(x)=x(x-1)g(x)$이고 $g(0)=1$이다. (2)에 따라서 $f(-1)=2g(-1)=4$이므로 $g(-1)=2$이고, (3)에 따라서

$$g(x)=(x+1)^n+a_{n-1}(x+1)^{n-1}+\cdots+a_1(x+1)+2$$

이다. 또 $f'(x)=(x-1)g(x)+xg(x)+x(x-1)g'(x)$이므로 (4)에 의하여

$$f'(-1)=-3g(-1)+2g'(-1)=-6+2g'(-1)=-20$$

즉 $g'(-1)=-7$이다. 그런데

$$g'(x)=n(x+1)^{n-1}+\cdots+2a_2(x+1)+a_1$$

이므로 $g'(-1)=a_1=-7$이다. 마지막으로

$$g(0)=1+a_{n-1}+\cdots+a_2-7+2=1$$

이므로

$$a_{n-1}+\cdots+a_2=5$$

이다. 따라서 차수가 가장 낮은 경우는 $n=3$이고 $a_2=5$, 즉

$$f(x)=x(x-1)\left[(x+1)^3+5(x+1)^2-7(x+1)+2\right]$$

이다.

[1.2] $Q(x)=P(x-1)$이라 하면 $Q(\alpha_i+1)=P(\alpha_i)=0$이므로 $\alpha_i+1$은 $Q(x)=0$의 근이다. 따라서 구하는 방정식은

$$a_n(x-1)^n+\cdots+a_1(x-1)+a_0=0$$

이다.

[1.3] $R(x)=P\left(\dfrac{1}{x}\right)$이라 하면 $R\left(\dfrac{1}{\alpha_i}\right)=P(\alpha_i)=0$이므로 $\dfrac{1}{\alpha_i}$은

$$R(x)=a_n\frac{1}{x^n}+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{1}{x}+a_0=0$$

의 근이다. 따라서 구하는 $n$차 방정식은

$$x^nR(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

이다.

[1.4] $f(0)=f(1)=0$이므로 $\alpha_1=0, \alpha_2=1$이고 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$는

$$g(x)=(x+1)^3+5(x+1)^2-7(x+1)+2=0$$

의 근이다. [1.2]에 따라서 $\alpha_3+1, \alpha_4+1, \alpha_5+1$이 근이 되는 삼차방정식은

$$h(x)=g(x-1)=x^3+5x^2-7x+2=0$$

이고, [1.3]에 따라서 $\dfrac{1}{\alpha_3+1},\dfrac{1}{\alpha_4+1},\dfrac{1}{\alpha_5+1}$이 근이 되는 삼차방정식은

$$x^3h\left(\frac{1}{x}\right)=2x^3-7x^2+5x+1=0$$

이다. 따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 따라서

$$\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\alpha_4+1}+\frac{1}{\alpha_5+1}=\frac{7}{2}$$

이므로

$$\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\alpha_4+1}+\frac{1}{\alpha_5+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=5$$

이다.

## [문제 2]

### 1. 출제배경

고등학교 수학의 주요한 목표 중 하나는 정적분의 이해와 계산이다. 본 문제에서는 치환적분을 활용하여 정적분을 계산할 수 있는 능력을 갖추고 있는지, 정적분의 기하적 의미를 이해하고 있는지, 함수의 대칭성을 정적분 계산에 이용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 적절한 치환을 통해서 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 정적분이 나타내는 넓이와 급수가 나타내는 넓이를 비교하여, 부등식을 증명할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 함수의 대칭성, 연쇄법칙을 활용하여 치환적분법에 적용할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 함수의 대칭성과 [2.3]에서 구한 식을 활용하여 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

### 2. 예시답안 및 해설

[2.1] $x=\tan\theta$로 치환하면, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이고, $\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이므로,

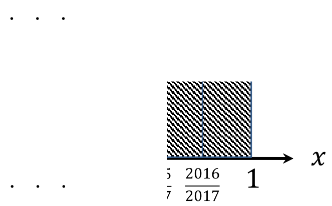
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} 1 d\theta = \frac{\pi}{4}$$

이다.

[2.2] 주어진 급수에서 분모와 분자를 $2017^2$으로 나누면

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{8068}{2017^2+k^2} = 4\sum_{k=1}^{2017} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{2017}\right)^2} \frac{1}{2017}$$

이 된다. 이제 곡선 $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$를 생각하자. 구간 $[0,1]$을 2017등분한 후, $k$번째 구간에서 높이가 $f\left(\frac{k}{2017}\right)$인 직사각형을 생각하자. 아래 그림과 같이




$\frac{1}{1+x^2}$이 구간 $[0,1]$에서 감소함수이므로, 직사각형들의 넓이의 합은 곡선 $y=\frac{1}{1+x^2}$과 구간 $[0,1]$사이의 영역의 넓이보다 작다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{2017}\right)^2} \frac{1}{2017} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

가 성립한다. 이제 [2.1]번에서

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{8068}{2017^2+k^2} < 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

가 성립한다.

[2.3] 조건 (2)에 따라서 $f(\pi-x)=-f(x)$를 얻는다. 이 식의 양변을 $x$로 미분하면 $-f'(\pi-x)=-f'(x)$이므로 $f'(\pi-x)=f'(x)$가 성립한다. 정적분 $\int_0^{\pi} \frac{xf'(x)}{1+f(x)^2}dx$에서 $x=\pi-t$로 치환하면

$$\int_0^{\pi} \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-t)f'(\pi-t)}{1+\{f(\pi-t)\}^2}(-dt) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)f'(t)}{1+\{f(t)^2\}}dt$$

이다.

[2.4] [2.3]번의 풀이에서

$$\int_0^{\pi} \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}\,dx$$

이다. 여기서 $u=f(x)$로 치환하여

$$\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \pi\int_0^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\pi^2}{4}$$

을 얻는다.

# [문제 3]

## 1. 출제배경

함수는 수학적 사고에서 가장 중요하고 기본적인 요소이다. 또한 순열과 조합은 셈의 기본적 요소이다. 함수의 이해능력과 특정 조건이 주어진 경우의 수들을 구할 수 있는지 학인하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 합성함수의 정의를 이해하고, 합성함수를 정의할 수 있는 조건을 파악하고, 관련된 함수의 개수를 셀 수 있는지 평가한다.
[3.2] 주어진 조건이 항등함수가 됨을 이해하는지 평가한다.
[3.3] 주어진 조건이 중복조합과 관련됨을 이해하는지 평가한다.
[3.4], [3.5] 합성함수가 일대일 함수가 되기 위한 조건을 이해하고 관련된 함수의 개수를 셀 수 있는지 평가한다.

## 2. 예시답안 및 해설

[3.1] ① $f(1)=1$이므로 함수 $f$의 개수는 $\{2,3,\cdots,k\}$에서 $Y$로의 함수의 개수와 같다. 그러므로 $n$개에서 중복을 허락하여 $k-1$개를 택하여 일렬로 나열하는 수 ${}_n\Pi_{k-1}=n^{k-1}$이다.
② 합성함수 $g\circ f$는 $X$에서 $X$로의 함수이므로 $k$개에서 중복을 허락하여 $k$개를 택하여 일렬로 나열하는 수 ${}_k\Pi_k=k^k$이다.

[3.2] 합성함수 $g\circ f$는 항등함수이므로 1가지이다.

[3.3] 조건을 만족하는 합성함수 $g\circ f$는 $X$의 $k$개의 수 $1,2,\cdots,k$에서 중복을 허락하여 $k$개를 택한 후, 그 $k$개의 수를 작은 것부터 크기순으로 일렬로 나열하고 차례로 $(g\circ f)(1)$, $(g\circ f)(2)$, $\cdots,(g\circ f)(k)$에 대응시키면 된다. 따라서 합성함수 $g\circ f$의 개수는 $k$개에서 중복을 허락하여 $k$개를 택하는 조합인 중복조합의 수 ${}_k\mathrm{H}_k$ (또는 ${}_{2k-1}\mathrm{C}_k=\dfrac{(2k-1)!}{(k-1)!\,k!}$)이다.

[3.4] $f$는 일대일 함수이어야 한다. 일대일함수 $f$의 개수는 $n$개에서 $k$개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$이다.

[3.5] 함수 $g$는 $f(X)$에서 $X$로는 일대일로 대응되어야 하고, $Y-f(X)$에서 $X$로는 어떠한 값이라도 대응되면 된다. 함수 $f$는 일대일 함수이고 $f(X)$의 원소의 개수는 $k$이므로 $f(X)$에서 $X$로의 일대일로 대응시키는 방법은 ${}_k\mathrm{P}_k=k!$가지이다. 또한, $Y-f(X)$에서 $X$로 함수의 조건을 만족하며 대응시키는 방법은 ${}_k\Pi_{n-k}=k^{n-k}$가지이다. 그러므로 함수 $g$의 개수는

$$ {}_k\mathrm{P}_k\times{}_k\Pi_{n-k}=k!\times k^{n-k} $$

이다.