2020학년도 서강대학교

모의논술 자료집(2차)

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목　　차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

제시문

[가] 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ 또는 $x\to a$일 때, $f(x)\to\infty$와 같이 나타낸다. 또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고, 기호로 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ 또는 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to\alpha$ 와 같이 나타낸다. 한편 함수 $f(x)$에서 $x\to\infty$ 일 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대로 발산하는 것을 기호로 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$와 같이 나타낸다.

[나] 최대.최소의 정리에 의하면 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 이 성질로부터 다음과 같은 평균값 정리가 성립한다.

"함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다."

평균값 정리를 사용하면 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다는 것을 보일 수 있다.

[다] 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

또한 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n\ge m$ (m은 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(i) $n=m$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

[라] 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 위 제시문 [다]의

(i), (ii)와 같은 단계에 따라 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다. 제시문 [다]의 논리와 마찬가지로 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$에 대해서 다음 두 가지를 보이면 명제 $p(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(i) $n=1$ 과 $n=2$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$와 $n=k+1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+2$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

문제

[1] 제시문 [나]의 평균값 정리를 사용하여 $0<a<b$일 때 부등식 $\sqrt{b}-\sqrt{a}<\dfrac{b-a}{2\sqrt{a}}$ 이 성립함을 보이시오.

[2] 제시문 [가]와 [나]를 참조하여 미분가능 함수 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$가 모든 $x>0$에 대하여 $f'(x)\ge f(x)$을 만족할 때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$임을 보이시오.

[3] 유리수 전체의 집합을 Q 라 하자. Q에서 정의된 함수 f가 모든 $x,y\in Q$ 에 대하여 등식 $f(x+y)-f(x-y)=2f(y)$를 만족할 때, 제시문 [다]와 [라]를 참조하여 r이 임의로 주어진 양의 유리수일 때 모든 자연수 n에 대하여 $f(nr)=f(r)n$ 임을 보이시오.

[4] 문항 [3]의 결과를 이용하여 함수 f는 모든 유리수 x 에 대하여 $f(x)=f(1)x$를 만족함을 보이시오.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 평균값 정리를 이해하고 증명에 활용할 수 있는 능력을 평가함
· 미분가능 함수의 증가와 감소, 함수의 극한 그리고 평균값 정리를 사용하여 문제를 해결함
· 함수와 명제의 개념을 이해함
· 수학적 귀납법을 사용하여 증명하는 능력을 평가함
· 제시문을 이해하고 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 함
· 주어진 성질을 만족하는 함수를 찾는 능력을 평가하고자 함

2. 문항해설

[1] : 평균값의 정리를 사용하여 증명할 수 있는 능력을 평가하고자 하는 문제이다. $f(x) = \sqrt{x}$ 에 평균값 정리를 적용하는 것이 답안의 핵심이다.
[2] : 함수의 극한과 평균값의 정리 그리고 미분가능 함수의 증가조건을 모두 활용해서 해결할 수 있는 문제이다. 평이한 문항 [1]에 비해서 난이도가 있으며 우수한 학생을 변별하고자 하는 의도이다.
[3] : 명제와 함수 그리고 수학적 귀납법의 활용에 대한 문제이다. 답안의 핵심은 함수를 이해하고 제시문을 통해 올바른 수학적 귀납법을 사용해서 결과에 도달하는 능력이다.
[4] : 문항 [3]의 결과와 주어진 함수의 성질을 정확히 파악해야 올바른 증명에 이를 수 있다. 문항 [4]는 문항 [3]과 마찬가지로 복잡한 계산을 필요로 하지 않지만 주어진 함수의 성질에 대한 이해가 바탕이 되어야 올바른 증명에 이를 수 있어 우수한 학생을 선발하기 위한 변별력을 갖추고 있다.

3. 채점기준

정확한 논리를 사용하여 결과를 도출해야 하고 계산 및 증명 과정이 잘 나타나 있어야 함.

(유의사항)
풀이를 서술하는 과정에서 인과관계를 정확하게 표현할 수 있는 능력을 살피는 것도 중요하므로 정확한 수리적 문장을 사용하지 않으면 요소요소마다 감점 처리함.

4. 예시답안 및 예시답안에 대한 근거

※ 다음 풀이는 축약된 모범답안으로서 풀이과정에서 반드시 포함되어야 함.

[1]. $f(x)=\sqrt{x}$ 에 평균값 정리를 적용하면 적당한 $c\in(a,b)$ 가 존재하여
$\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}<\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ 이다. 따라서 $\sqrt{b}-\sqrt{a}<\dfrac{b-a}{2\sqrt{a}}$가 성립한다.

[2]. 임의의 $a>1$에 대하여 함수 $f(x)$는 $[1,a]$에서 미분가능 하므로 평균값정리에 의하여
$\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=f'(t)$를 만족하는 어떤 t가 1과 a사이에 존재한다.
모든 $x>0$에 대하여 $f'(x)\ge f(x)>0$ 이므로 $f(x)$는 $x>0$에서 증가함수이다.
조건에 의해서 $f'(t)\ge f(t)>f(1)$ 가 성립한다.
그러므로
$f(a)-f(1)=f'(t)(a-1)>f(1)(a-1)=f(1)a-f(1)$
따라서 임의의 $a>1$에 대하여 $f(a)>f(1)a$ 가 성립한다.
$f(1)>0$ 이므로 양변에 극한을 취하면
$\lim\limits_{a\to\infty}f(a)\ge\lim\limits_{a\to\infty}f(1)a=\infty$를 얻는다.

[3]. $f\in A$ 라 할 때 등식 $f(x+y)-f(x-y)=2f(y)$에 $y=0$을 대입하면
$f(x)-f(x)=2f(0)$ 즉 $f(0)=0$ 을 얻는다. 양의 유리수 r이 주어졌을 때 등식에
$x=y=r$를 대입하면 $f(2r)=2f(r)$을 얻는다. 이제 함수 f가 주어진 자연수 k 에 대하여
$f(kr)=f(r)k$ 그리고 $f((k+1)r)=f(r)(k+1)$을 만족한다고 가정하자. 이제 등식
$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)$에 $x=(k+1)r$과 $y=r$을 대입하면, 가정으로부터
$f((k+2)r)=2f(r)+f(kr)=(k+2)f(r)$을 만족한다. 따라서 제시문 [라]에 의해서 함수 f는
임의로 주어진 양의 유리수 r과 모든 자연수 n 에 대하여 $f(nr)=nf(r)$를 만족한다.

[4]. 먼저 문항 [3]에 의하여 임의로 주어진 양의 유리수 $\dfrac{n}{m}$ 에 대하여 $f\left(\dfrac{n}{m}\right)=nf\left(\dfrac{1}{m}\right)$을 만족하고
$f(1)=f\left(m\times\dfrac{1}{m}\right)=mf\left(\dfrac{1}{m}\right)$을 만족하므로 $f\left(\dfrac{n}{m}\right)=nf\left(\dfrac{1}{m}\right)=\dfrac{n}{m}f(1)$이 성립한다.
따라서 모든 양의 유리수 x 에 대하여 $f(x)=f(1)x$이 성립한다.
이제 $f(x+y)-f(x-y)=2f(y)$에 $y=-x$를 대입하면 모든 양의 유리수 x에 대하여
$f(-2x)=-2f(x)=-2xf(1)$를 얻는다. 따라서 음의 유리수에 대해서도 $f(x)=f(1)x$이 성립한다.