2020학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열)

출제위원장	(인)		
출제위원	(인)	출제위원	(인)
출제위원	(인)	출제위원	(인)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 100점)

자연수 n에 대하여 방정식 $x+y+z=n+2$를 만족시키는 세 자연수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 전체의 집합을

$$\{(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ \cdots,\ (x_m,\ y_m,\ z_m)\}$$

이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(x_k^2+y_k^2+z_k^2\right)$을 n에 대하여 인수분해된 식으로 나타내어라.

[예시답안]

$(a,\ b,\ c)$가 주어진 집합의 원소이면 $a,\ b,\ c$의 순서를 바꿔도 주어진 집합의 원소가 되므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}x_k^2=\sum_{k=1}^{m}y_k^2=\sum_{k=1}^{m}z_k^2$이다. 따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(x_k^2+y_k^2+z_k^2\right)=3\sum_{k=1}^{m}x_k^2$이다.

$x_k=l\ (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때 가능한 $y_k,\ z_k$의 순서쌍 $(y_k,\ z_k)$는

$$(1,\ n-l+1),\ (2,\ n-l),\ \cdots,\ (n-l+1,\ 1)$$

로 총 $(n-l+1)$개이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}x_k^2&=\sum_{l=1}^{n}l^2(n-l+1)\\&=(n+1)\sum_{l=1}^{n}l^2-\sum_{l=1}^{n}l^3\\&=\frac{(n+1)n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\&=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}\end{aligned}$$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(x_k^2+y_k^2+z_k^2\right)=3\sum_{k=1}^{m}x_k^2=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$이다.

[문제 2] (총 100점)

좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$의 제1사분면에 있는 임의의 점을 P라 하고, $\theta=\angle\mathrm{OFP}$라 하자. 두 선분 FO, FP와 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $S'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

[예시답안]

포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(0,1)$이다. 점 P를 $\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$ $(t>0)$라 하자.

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 Q라 하면, $\overline{\mathrm{PQ}}=t$, $\overline{\mathrm{FP}}=1+\frac{1}{4}t^2$이므로,

$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{FP}}}=\frac{t}{1+\frac{1}{4}t^2}=\frac{4t}{4+t^2},\quad \cos\theta=\frac{4-t^2}{4+t^2}$$

이다. 이 식을 t에 관하여 풀면 $t=\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$이고 $\frac{dt}{d\theta}=\frac{2}{1+\cos\theta}$이다.

합성함수의 미분법에 의해 $\frac{dS}{d\theta}=\frac{dS}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}$이다. $S(\theta)$를 t에 관한 식으로 나타내면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}t^2\right)t-\int_0^t\frac{1}{4}x^2dx=\frac{1}{24}t^3+\frac{1}{2}t$$

이므로 $\frac{dS}{dt}=\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}$이다.

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{dt}{d\theta}=\frac{4}{3}$, $\frac{dS}{dt}=\frac{2}{3}$이므로 $S'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$이다.

[문제 3] (총 100점)

자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 곡선 $y=e^{-x}\sin nx$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하여라.

[예시답안]

$S_n = \int_0^{\pi} \left| e^{-x}\sin nx \right| dx$이다. 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 방정식 $e^{-x}\sin nx = 0$의 근은

$$x = 0, \frac{\pi}{n}, \cdots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi$$

이다. $k=1, \cdots, n$에 대해

$$a_k = \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left| e^{-x}\sin nx \right| dx = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x}\sin nx\, dx \right|$$

라 하면 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$이다. 부분적분법을 이용하면

$$\int e^{-x}\sin nx\, dx = -\frac{e^{-x}(\sin nx + n\cos nx)}{n^2+1}$$

이다. 따라서 $a_k = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x}\sin nx\, dx \right| = \frac{ne^{-\frac{k\pi}{n}}}{n^2+1}\left(1+e^{\frac{\pi}{n}}\right)$이므로

$$S_n = \frac{n}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{k\pi}{n}}\right\} = \frac{2n}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} + \frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)$$

이다. $0 \le 1-e^{-\frac{\pi}{n}} \le 1$이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right) = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1} = 2$이고, 정적분과 급수의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} = \int_0^1 e^{-\pi x}\, dx = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}$$

이므로

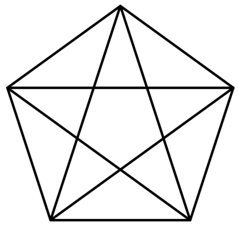
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$$

이다.

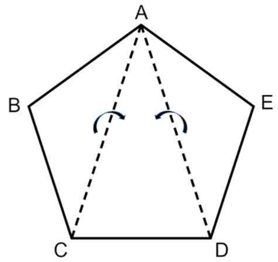
[문제 4] (총 100점)

다음 물음에 답하여라.

(a) 한 변의 길이가 2인 정오각형의 대각선의 길이를 구하여라. (30점)

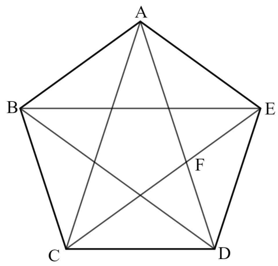


(b) 정오각형 ABCDE에서 두 대각선 AC와 AD를 따라 두 삼각형 ABC와 ADE를 두 선분 AB와 AE가 일치하도록 접고 두 점 B와 E가 만나는 점을 P라고 하자. 두 면 PAC와 PAD가 이루는 이면각의 크기를 θ라고 하면 $\cos\theta = a + b\sqrt{5}$이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a와 b는 유리수이다.) (70점)



[예시답안]

(a) 오른쪽 그림에서 정오각형의 성질에 의해 $\triangle ACF$, $\triangle CDF$는 각각 이등변삼각형이므로 $\overline{AF} = \overline{CF} = \overline{CD} = 2$이다. 대각선 AC의 길이를 x라 하면 $\overline{FD} = x-2$이고, $\triangle ACD$와 $\triangle CDF$는 닮음이므로 $x:2 = 2:x-2$이다. 따라서 $x^2 - 2x - 4 = 0$이고 대각선의 길이는 $x = 1+\sqrt{5}$이다.



(b) $\overline{AB} = 2c$라 하자. 두 면 PAC와 PAD의 교선은 선분 AP이다. [그림 1]과 같이 면 PAC의 점 C에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. 이 때 대칭성에 의하여 직선 AP는 두 직선 QC, QD와 수직이다. 그러므로 두 면 PAC와 PAD가 이루는 이면각의 크기는 $\theta = \angle CQD$이다. [그림 2]와 같이 Q_1과 Q_2를 직선 AB와 AE에 내린 수선의 발이라 하면 $\overline{QC} = \overline{Q_1C} = \overline{Q_2D} = \overline{QD}$이다.

[그림 2]의 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC의 길이가 $(1+\sqrt{5})c$이므로 $\angle BAC = \alpha$라 하면

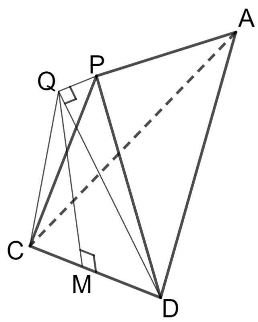
$$\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\ \sin^2\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

이고 $\overline{Q_1C} = (1+\sqrt{5})c\sin\alpha$이다.

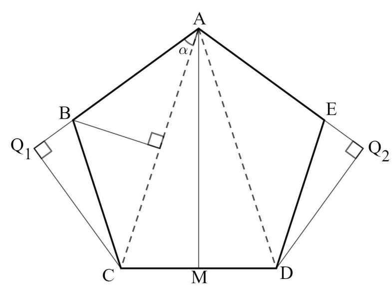
[그림 1]의 이등변삼각형 QCD에서 선분 CD의 중점을 점 M이라 하면 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{CM}}{\overline{QC}} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})\sin\alpha}$이다. 따라서

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{2}{(1+\sqrt{5})^2\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

이므로 $a=0$, $b=\frac{1}{5}$, $a+b=\frac{1}{5}$이다.



[그림 1]



[그림 2]