2020학년도 세종대학교 자연계열

모의논술고사 문항 및 해설

2020

SEJONG UNIVERSITY

1. 문항 및 제시문

[문제 1] A학생은 “가”지역에 있는 아파트의 방의 개수에 관심이 있으며, “가”지역의 아파트는 1~3개의 방을 가지고 있다. 방이 1개일 경우의 확률은 $\frac{a}{2}\,(0<a<1)$, 2개일 경우의 확률은 $1-a$, 그리고 3개일 경우의 확률은 $\frac{a}{2}$이다. 표준정규분포표가 필요한 경우 아래 표를 사용하여, 다음 물음에 각각 답하시오.

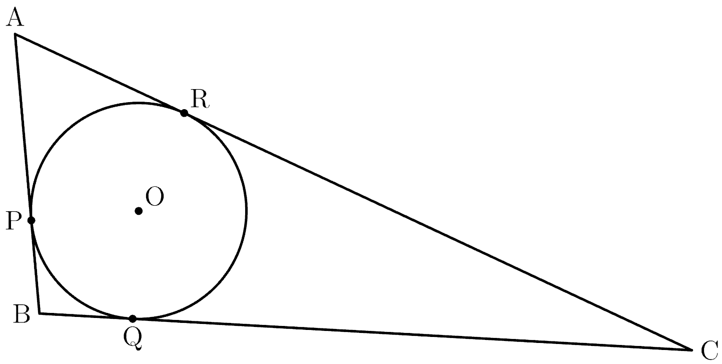
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.50	0.1915
1.00	0.3413
1.50	0.4332
1.96	0.4750
2.00	0.4772
2.50	0.4938

(1-1) “가”지역에서 독립으로 임의추출한 2개 아파트 표본 X_1, X_2에 대하여 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$라고 하자. 확률 $\mathrm{P}(2<\overline{X}<4)$를 구하시오. (70점)

(1-2) “가”지역에서 독립으로 임의추출한 100개 아파트 표본 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$에 대하여 $T=\frac{1}{100}X_1+\frac{2}{100}X_2+\cdots+\frac{99}{100}X_{99}+X_{100}$라고 하자. 기댓값 $\mathrm{E}(T)$를 구하시오. (80점)

(1-3) “가”지역에서 독립으로 임의추출한 100개 아파트 표본을 조사한 결과 방의 개수가 1개 또는 3개인 경우가 20건, 그리고 2개인 경우가 80건이었다. a에 대하여 신뢰도 95%인 신뢰구간을 구하시오. (80점)

[문제 2] 삼각형 ABC는 반지름이 1이고 중심이 O인 원에 외접한다. 아래 그림과 같이 삼각형의 변 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$와 원의 교점을 각각 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$이라 하자. 선분 AB, AC의 길이는 각각 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $4\sqrt{3}$이고 각 A는 $\frac{\pi}{3}$이다. 다음 물음에 각각 답하시오.



(2-1) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$로 나타내시오. (70점)

(2-2) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$를 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$로 나타내시오. (80점)

(2-3) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$로 나타내시오. (80점)

[문제 3] $x>0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$는 항상 $f(x)>0$ 이며 모든 점에서 미분가능하다. 곡선 $y=f(x)$ 의 한 점 $\mathrm{P}(x,y)$ 에서 원점 O 까지의 거리를 $d(x)$, 직선 OP 의 기울기를 $m(x)$이라 할 때 다음이 성립한다.

(가) $x>0$ 에서 $d(x)m(x)$ 는 상수함수이다.

(나) $y=f(x)$의 어떤 점 $(a,1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다. (단, a 는 상수)

다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) (가)에서 $d(x)m(x)$ 의 값을 구하시오. (80점)

(3-2) (나)의 점 $(a,1)$에서 곡선 $y=f(x)$ 에 대한 접선의 방정식을 구하고, 이 접선과 점 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$ 사이의 거리를 구하시오. (80점)

(3-3) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{6}}^{1} \frac{x^2}{f(x)^3} f'(x)\,dx$ 의 값을 구하시오. (80점)

2. 출제 의도, 문항 해설 및 자료 출처

(가) 출제의도

문항	출제 의도
1번 문항	모비율, 표본평균, 표본비율, 신뢰구간에 대한 이해도를 평가한다.
2번 문항	평면도형의 위치관계, 벡터의 크기, 실수배, 연산, 내적 등에 대한 이해도를 평가한다.
3번 문항	음함수, 역함수의 미분, 접선, 치환적분법 등에 대한 이해도와 미분과 적분의 활용 능력을 평가한다.

(나) 문항해설

문항	문항 해설
1번 문항	표본의 평균을 구하고, 표본비율을 이용하여 모비율의 신뢰구간을 추정한다.
2번 문항	조건을 이용하여, 세 개의 벡터를 각각 고정된 두 개의 벡터로 표현한다.
3번 문항	주어진 조건을 만족하는 함수로부터 역함수의 미분, 접선, 점과 직선 사이의 거리, 정적분 등을 구한다.

(다) 자료출처

문항	참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
1번 문항	고등학교 교과서	확률과 통계	김창동 외	교학사	2016	115~165
		확률과 통계	우정호 외	두산동아	2013	142~209
2번 문항	고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	55~115
		기하와 벡터	우정호 외	두산동아	2013	66~108
3번 문항	고등학교 교과서	미적분II	우정호 외	두산동아	2013	124~153
		미적분II	김창동 외	교학사	2016	110~123, 172~179

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$\mathrm{P}(4 < X_1 + X_2 < 8)$ **(+20점)** $\mathrm{P}(X_1 = 2, X_2 = 3) + P(X_1 = 3, X_2 = 2) + \mathrm{P}(X_1 = 3, X_2 = 3)$ **(+20점)** 답: $\frac{1}{4}a(4-3a)$ **(+30점)**	70
1-2	$\mathrm{E}(X_k) = 2,\ k = 1, 2, \ldots, 100$ **(+30점)** $\mathrm{E}(T) = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k\mathrm{E}(X_k)$ **(+30점)** 답: 101 **(+20점)**	80
1-3	방의 개수가 1개 또는 3개인 아파트의 수를 Y라 하면, $Y \sim \mathrm{B}(100, p)$ **(+20점)** $\frac{Y - 100a}{\sqrt{100a(1-a)}}$ 또는 $\frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\frac{a(1-a)}{100}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ **(+20점)** $\left(\frac{1}{5} - 1.96 \times \sqrt{\frac{1/5 \times 4/5}{100}},\ \frac{1}{5} + 1.96 \times \sqrt{\frac{1/5 \times 4/5}{100}}\right)$ **(+20점)** 답: $\left(\frac{76}{625}, \frac{174}{625}\right)$ 또는 $(0.1216, 0.2784)$ **(+20점)**	80

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$\overrightarrow{AB}= a\overrightarrow{OP}+ b\overrightarrow{OR}$ (+20점) $0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = a - \frac{b}{2}$ (+20점) 답: $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OR}$ (+30점)	70
2-2	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (+20점) $\overrightarrow{AC} = -8\overrightarrow{OP} - 4\overrightarrow{OR}$ (+30점) 답: $\overrightarrow{BC} = -\frac{13}{2}\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$ (+30점)	80
2-3	$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$ (+20점) $\overrightarrow{PB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$ (+20점) $\overrightarrow{BQ} = -\frac{13}{14}\overrightarrow{OP} - \frac{1}{7}\overrightarrow{OR}$ (+20점) 답: $\overrightarrow{OQ} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{OP} - \frac{8}{7}\overrightarrow{OR}$ (+20점)	80

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$d(x)m(x)=c$라 놓았을 때 $x^2y^2+y^4=c^2x^2$를 구하면 **(+20점)** $y=1$에서 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y^3+2y(c^2-y^2)}{\sqrt{(c^2-y^2)^3}}=3$ **(+30점)** 답: $d(x)m(x)=\sqrt{2}$ **(+30점)**	80
3-2	$a=1$ **(+20점)** $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **(+20점)** 접선의 방정식은 $x-3y+2=0$ **(+20점)** 답: $\dfrac{1}{30}\left\vert 6\sqrt{10}+\sqrt{15}-9\sqrt{5}\right\vert$ 또는 $\dfrac{1}{30}\left(6\sqrt{10}+\sqrt{15}-9\sqrt{5}\right)$ **(+20점)**	80
3-3	$y=f(x)$로 치환 **(+20점)** $\displaystyle\int_{1/\sqrt{6}}^{1}\frac{x^2}{f(x)^3}f'(x)\,dx=\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{y}{2-y^2}\,dy$ **(+30점)** 답: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$ **(+30점)**	80

4. 예시 답안

[문제 1]

(1-1) $\mathrm{P}(2 < \overline{X} < 4)$ = $\mathrm{P}(4 < X_1 + X_2 < 8)$

= $\mathrm{P}(X_1 = 2, X_2 = 3) + \mathrm{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) + \mathrm{P}(X_1 = 3, X_2 = 3)$

= $(1-a) \times \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \times (1-a) + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}$ = $\frac{1}{4}a(4-3a)$

(1-2) 방의 개수에 대한 기댓값은 $1 \times \frac{a}{2} + 2 \times (1-a) + 3 \times \frac{a}{2} = 2$이다.

따라서 $\mathrm{E}(X_k) = 2, k = 1, 2, \ldots, 100$이다.

그러므로 $\mathrm{E}(T)$ = $\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k\mathrm{E}(X_k)$ = $\frac{2}{100}\sum_{k=1}^{100} k$ = $\frac{2}{100} \times \frac{100 \times 101}{2}$ = 101이다.

(1-3) 방의 개수가 1개 또는 3개인 아파트의 수를 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100, a)$를 따른다.

따라서 $\hat{a} = \frac{Y}{100}$이고, $\frac{Y - 100 \times a}{\sqrt{100 \times a(1-a)}} = \frac{\frac{Y}{100} - a}{\sqrt{\frac{a(1-a)}{100}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$

를 따른다.

그러므로 a에 대한 95%의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{5} - 1.96 \times \sqrt{\frac{1/5 \times 4/5}{100}},\ \frac{1}{5} + 1.96 \times \sqrt{\frac{1/5 \times 4/5}{100}}\right)$$

$$= \left(\frac{125 - 49}{625}, \frac{125 + 49}{625}\right) = \left(\frac{76}{625}, \frac{174}{625}\right) = (0.1216, 0.2784)$$

[문제 2]

(2-1) 각 A는 $\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle \mathrm{POR} = \frac{2}{3}\pi$이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\frac{1}{2}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\overrightarrow{\mathrm{OP}} + b\overrightarrow{\mathrm{OR}}$라 하면, $0 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a\overrightarrow{\mathrm{OP}} + b\overrightarrow{\mathrm{OR}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = a - \frac{b}{2}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2a\overrightarrow{\mathrm{OR}}$이다. 또한 $\frac{27}{4} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3a^2$이므로 $a = \pm\frac{3}{2}$이다.

방향을 고려하면 $a = -\frac{3}{2}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 이 된다.

(2-2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$이다.

풀이 (2-1)과 같이 하면 다음과 같이 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$로 나타낼 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = a\overrightarrow{\mathrm{OP}} + b\overrightarrow{\mathrm{OR}}$로 하면, $0 = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (a\overrightarrow{\mathrm{OP}} + b\overrightarrow{\mathrm{OR}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\frac{a}{2} + b$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2b\overrightarrow{\mathrm{OP}} + b\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 이다.

또한 $48 = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3b^2$이므로 $b = \pm 4$이다.

방향을 고려하면 $b = -4$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -8\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 4\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 이 된다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -8\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 4\overrightarrow{\mathrm{OR}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\frac{13}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 이다.

(2-3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ 이다.

$\angle \mathrm{OAP} = \frac{\pi}{6}$ 로부터 $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{AP}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\frac{13}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 로부터 $\overline{\mathrm{BC}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{BC}}}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{7\sqrt{3}}{2}}\left(-\dfrac{13}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) = -\dfrac{13}{14}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 이다.

따라서, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \dfrac{8}{7}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 이다.

[문제 3]

(3-1) $d(x)m(x)=c$라 두면, $d(x)=\sqrt{x^2+y^2}$이고 $m(x)=\dfrac{y}{x}$이므로 $x^2y^2+y^4=c^2x^2$을 얻는다. 따라서 $x=\dfrac{y^2}{\sqrt{c^2-y^2}}$이고, $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y^3+2y(c^2-y^2)}{\sqrt{(c^2-y^2)^3}}$이다.

(나)에서 $y=1$에서 $\dfrac{dx}{dy}=3$이므로 $2c^2-1=3(c^2-1)\sqrt{c^2-1}$이다. 이 식의 양변을 제곱한 후 정리하면 $(c^2-2)(9c^4-13c^2+5)=0$이다. 그런데 항상 $9c^4-13c^2+5>0$이므로 $c=d(x)m(x)=\sqrt{2}$를 얻는다.

(3-2) 풀이 (3-1)로부터 $x^2f(x)^2+f(x)^4=2x^2$이다.

$a>0$이고 $f(a)=1$이므로, $a^2+1=2a^2$, 즉, $a=1$이다.

$x=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ 일 때 $\dfrac{1}{6}f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^4=\dfrac{1}{3}$ 이므로, $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이므로 $x-3y+2=0$이다.

이 접선과 점 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{6}}-3\frac{1}{\sqrt{2}}+2\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{1}{30}\left|6\sqrt{10}+\sqrt{15}-9\sqrt{5}\right|=\frac{1}{30}(6\sqrt{10}+\sqrt{15}-9\sqrt{5})$$ 이다.

(3-3) (3-2)의 풀이에서 함수 $y=f(x)$가 두 점 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$과 $(1,1)$을 지난다는 것을 알고 있다. 적분을 풀기 위해 $y=f(x)$로 치환하자.

이 때, 위의 풀이에서 $x^2=\dfrac{y^4}{2-y^2}$임을 알고 있고 $f'(x)dx=dy$이므로

$$\int_{1/\sqrt{6}}^{1}\frac{x^2}{f(x)^3}f'(x)\,dx=\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{y}{2-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$ 이다.